ریاضی مهندسی: ۱۳۹۲,۸,۱۶

---

۸۷ تغییر روش گسسته‌سازی اعزال — مسأله زیر را گسسته‌سازی کنید؟

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + u(t) & 0 \leq x(t) \leq 1.5 \\ & -1 \leq u(t) \leq 1 \\ O.F. = x^2(1) + \int_0^1 u(t)^2\, dt \end{cases}$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \times \left(2x(t) + u(t)\right)$$

$$t = 0,\ t = \Delta t,\ \ldots\ t = k\Delta t,\ \ldots$$

$$x((k+1)\Delta t) = x(k\Delta t) + \Delta t\left(2x(k\Delta t) + u(k\Delta t)\right) \Rightarrow$$

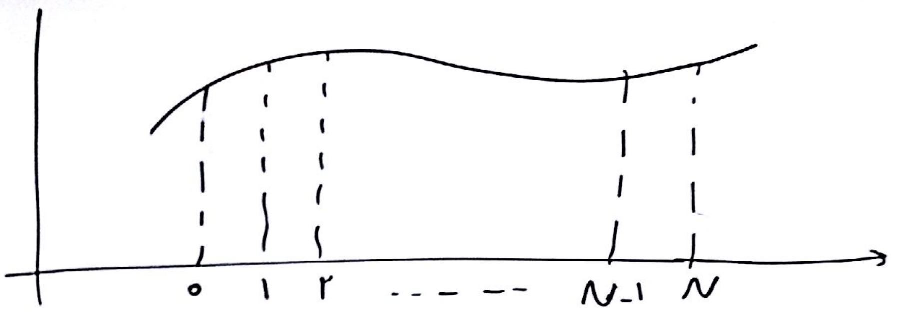
$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + \Delta t\left(2\hat{x}(k) + \hat{u}(k)\right)$$

و حواسمان هست که منظور از $\hat{x}(K)$ در واقع $x(K\Delta t)$ است و همینطور برای $u(t)$.

$$O.F. = x^{۲}(\overset{N\Delta t}{1}) + \Delta t\left(\hat{u}^{۲}(0) + \hat{u}^{۲}(1) + \cdots + \hat{u}^{۲}(N-1)\right)$$

$$\Delta t = \frac{1-0}{N}$$

N در واقع تعداد تقسیم بندی‌ها:



$$O.F. = \hat{x}^{۲}(N) + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \hat{u}(i)$$

حال ورودی و متغیرها

ورودی را ۵ در تا ۵ در تا گسسته سازی می‌کنیم.

$$0 \leq x(\overset{k\Delta t}{t}) \leq 1.5 \Rightarrow 0 \leq \hat{x}(k) \leq 1.5 \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}(k)=0 \\ \hat{x}(k)=0.5 \\ \hat{x}(k)=1 \\ \hat{x}(k)=1.5 \end{cases}$$

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \hat{u}(k) \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}(k)=-1 \\ \hat{u}(k)=-0.5 \\ \hat{u}(k)=0 \\ \hat{u}(k)=0.5 \\ \hat{u}(k)=1 \end{cases}$$

۱۸) چرا در مسأله قبل $x(1)$ تبدیل به $x(N)$ شد؟

برای توضیح مسأله زیر را در نظر بگیرید

$$x'(t) = 2x(t) + t$$

$$x(0) = 1 \quad , \quad t_{end} = 1$$

$$\Delta t = 0.2$$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 2x(t) + t \longrightarrow$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \big(2x(t) + t\big)\Delta t$$

$$t = 0 \Rightarrow x(\Delta t) = x(0) + (2x(0) + 0)\Delta t = \cdots$$

$$t = \Delta t \Rightarrow x(2\Delta t) = x(\Delta t) + (2x(\Delta t) + \Delta t)\Delta t = \cdots$$

$$t = 2\Delta t \Rightarrow x(3\Delta t) = x(2\Delta t) + (2x(2\Delta t) + \Delta t)\Delta t = \cdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$t = 4\Delta t \Rightarrow x(5\Delta t) = x(1) = x(4\Delta t) + (2x(4\Delta t) + \Delta t)\Delta t$$

به جای $x(k\Delta t)$ عبارت $x(k)$ را بگذاریم:

$$\hat{x}(2) = \hat{x}(1) + (2\hat{x}(1) + \Delta t)\Delta t$$

$$\vdots$$

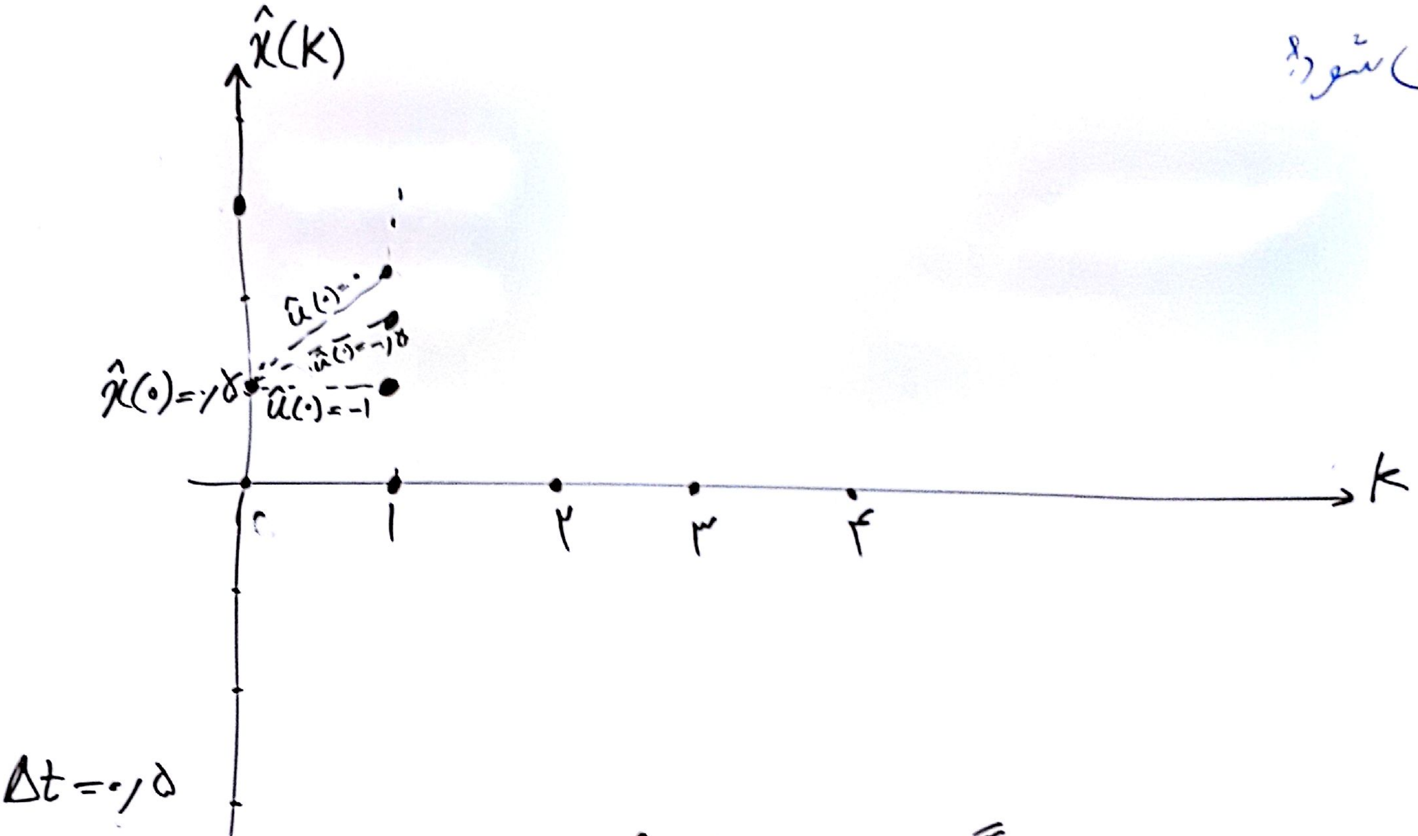
$$\hat{x}(\underbrace{5}_{5\Delta t}) = x(1)$$

حواسم هست که

$$\hat{x}(\overbrace{5}^{5\Delta t}) = x(5\Delta t) = x(1^s)$$

پس هر وقت ^ دیدیم یعنی داخل پرانتز در Δt ضرب شود.

۸۹) چگونه مسأله قبل به مسأله حرکت از a به b با کمینه هزینه تبدیل می‌شود؟



برای یک $\hat{x}(0)$ مثلاً $\hat{x}(0)=0.5$ با هر ورودی به یک نقطه دیگر می‌رسیم:

$$\hat{x}(1)=\overset{0.5}{\hat{x}(0)}+\overset{0.5}{\Delta t}\Big(\overbrace{2\hat{x}(0)}^{1}+\hat{u}(0)\Big)$$

$\downarrow$

۱ و ۰/۵ و ۰ و ۰/۵- و ۱-

از این دید شبیه مسأله مسیریابی از a به b است. چون در آن مسأله از نقطه a می‌توان به چند نقطه دیگر رسید.

پس مسأله معادلات حالت هم شبیه آن مسأله شد. با این تفاوت که باید هزینه هر تکه از مسیر را هم داشته باشیم:

$$O.F = \hat{x}^2(N) + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \hat{u}^2(i)$$

$$O.F = \underbrace{\Delta t\, \hat{u}^2(0)}_{J(0,1)} + \underbrace{\Delta t\, \hat{u}^2(1)}_{J(1,2)} + \cdots + \underbrace{\Delta t\, \hat{u}^2(N-1)}_{J(N-1,N)} + \underbrace{\hat{x}^2(N)}_{J(N,N)}$$

هزینه از ۰ به ۱

۹۰) مسأله زیر را با فرمول کلی

$$J^{*}(a,b)=\min\{J(a,c)+J^{*}(c,b)\}$$

حل کنید:

$$\begin{cases} x'(t) = u(t) \\ O.F. = x^2(2) + 2\int_0^2 u^2(t)\,dt \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta t = 1 \\ T_{end} = 2\end{matrix}\right\} \Rightarrow K = 0, 1, 2$$

$$0 \leq x(t) \leq 1.5$$

$$-1 \leq u(t) \leq 1$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + u(t) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + \hat{u}(k)} \quad C$$

$$O.F. = \hat{x}^2(2) + 2\Delta t\left(\hat{u}^2(0) + \hat{u}^2(1)\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{O.F. = \underbrace{2\hat{u}^2(0)}_{J(0,1)} + \underbrace{2\hat{u}^2(1) + \hat{x}^2(2)}_{J(1,2)}} \quad D$$

A

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = 0 \\ \hat{x}(k) = 0.5 \\ \hat{x}(k) = 1 \\ \hat{x}(k) = 1.5 \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2$

B

$$\begin{cases} \hat{u}(k) = -1 \\ \hat{u}(k) = -0.5 \\ \hat{u}(k) = 0 \\ \hat{u}(k) = 0.5 \\ \hat{u}(k) = 1 \end{cases}$$

شروع $k=0$ و انتها $k=2$. از یک step قبل از انتها شروع می کنیم. یعنی $x(1)$

$\hat{x}(1)+\hat{u}(1)$ ⓒ

$2\hat{u}^2(1)+\hat{x}^2(2)$

Ⓐ $\hat{x}(1)$	Ⓑ $\hat{u}(1)$	ⓒ $\hat{x}(2)$	Ⓓ $J(1,2)$	$J^*(1,2)$	$\hat{u}^*(1)$
۱/۵	۱	~~۲/۵~~	—	۱/۵	-۰/۵
	۰/۵	~~۲~~	—		
	۰	۱/۵	۲/۲۵		
	-۰/۵	۱	۱/۵		
	-۱	۰/۵	۲/۲۵		
۱	۱	~~۲~~	—	۰/۷۵	-۰/۵
	۰/۵	۱/۵	۲/۷۵		
	۰	۱	۱		
	-۰/۵	۰/۵	۰/۷۵		
	-۱	۰	۲		
۰/۵	۱	۱/۵	۴/۲۵	۰/۲۵	۰
	۰/۵	۱	۱/۵		
	۰	۰/۵	۰/۲۵		
	-۰/۵	۰	۰/۵		
	-۱	~~-۰/۵~~			
۰	۱	۱	۳	۰	۰
	۰/۵	۰/۵	۰/۷۵		
	۰	۰	۰		
	-۰/۵	~~-۰/۵~~			
	-۱	~~-۱~~			

$\hat{x}(0)+\hat{u}(0)$

$J(0,1)+J^*(1,2)$
$2\hat{u}^2(0)+J^*(1,2)$

Ⓐ $\hat{x}(0)$	Ⓑ $\hat{u}(0)$	ⓒ $\hat{x}(1)$	$J(0,2)$	$J^*(0,2)$	$\hat{u}^*(0)$
۱/۵	۱	~~۲/۵~~	—	۱/۲۵	-۰/۵
	۰/۵	~~۲~~	—		
	۰	۱/۵	۲×۰^۲+۱/۵ = ۱/۵		
	-۰/۵	۱	۲×(-۰/۵)^۲+۰/۷۵ = ۱/۲۵		
	-۱	۰/۵	۲×(-۱)^۲+۰/۲۵ = ۲/۲۵		
۱	۱	~~۲~~	—	۰/۷۵	۰
	۰/۵	۱/۵	۲×۰/۵^۲+۱/۵ = ۲		-۰/۵
	۰	۱	۲×۰^۲+۰/۷۵ = ۰/۷۵		
	-۰/۵	۰/۵	۲×(-۰/۵)^۲+۰/۲۵ = ۰/۷۵		
	-۱	۰	۲×(-۱)^۲+۰ = ۲		
۰/۵	۱	۱/۵	۳/۵	۰/۲۵	۰
	۰/۵	۱	۱/۲۵		
	۰	۰/۵	۰/۲۵		
	-۰/۵	۰	۰/۵		
	-۱	~~-۰/۵~~	—		
۰	۱	۱	۲/۷۵	۰	۰
	۰/۵	۰/۵	۰/۷۵		
	۰	۰	۰		
	-۰/۵	~~-۰/۵~~	—		
	-۱	~~-۱~~	—		

اگر متغیر من در لحظه ۰ در $\hat{x}(0)=0/5$ باشد چه مسیری بهینه است:

$$\hat{x}(0)=0/5 \xrightarrow{\hat{u}^*(0)=0} \hat{x}(1)=0/5 \xrightarrow{\hat{u}^*(1)=0} \hat{x}(2)=0/5$$

و اگر $\hat{x}(0)=0$ بود

$$\hat{x}(0)=0 \xrightarrow{\hat{u}^*(0)=0} \hat{x}(1)=0 \xrightarrow{\hat{u}^*(1)=0} x(2)=0$$

و اگر $\hat{x}(0)=1/5$

$$\hat{x}(0)=1/5 \xrightarrow{\hat{u}^*(0)=-0/5} \hat{x}(1)=1 \xrightarrow{\hat{u}^*(1)=-0/5} \hat{x}(2)=0/5$$